§5. Grothendieck Groups

☆ Grothendieck 群 とは

…特定の群を指すというより、様々な分野で現れる特定の構成を指す.

> モチベ① : $M, N \mapsto M \oplus N$ (直和) を加法
> $M, N \mapsto M \otimes N$ (テンソル積) を乗法 と思うとき.
>
> ここから環が作れるのではないか?

> モチベ② : 加法的関数を調べたい.

Def. ("短完全列"が扱えるような適当な場所 $\mathcal{C}$ で)　G : 何らかの Abel 群 (演算は + で書く)

$\chi : \mathcal{C} \to G$ (写像) が **加法的**

$\Leftrightarrow$ [$\forall$短完全列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ に対し
$$\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'')$$

例:
- 有限次元 K-vect の圏 での $\dim_K$ (次元)
- 長さ有限 A-Mod の圏 での l (長さ)
- 連接層の圏 での χ (Euler 標数) etc.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d] & G \text{ (群)} \\ \tilde{\mathcal{C}} \arrow[ur, dashed, "\exists ! \tilde{\chi}"'] & \end{tikzcd}$$

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$: ex. なら
加法的関数は M と $M' + M''$ を区別できないので
はじめから M と $M' + M''$ を同一視しておきたい

$\mathcal{C}$において $0 \to M' \to M \to M' \to 0$: ex. があるときに
M と $M' + M''$ を同一視したもの } 加法的関数の親玉 : **Grothendieck 群**

(つまり, $\{$加法的関数 $\chi : \mathcal{C} \to \bigcirc\}$ という関手 $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ を $\tilde{\mathcal{C}}$ が表現する

$\rightsquigarrow$
- (有限次元 K-vect)$^{\sim}$ $= \mathbb{Z}$
- (X上の有限次元 K-vect b'dle)$^{\sim}$ $= K(X) \rightsquigarrow$ K理論

M：mcf. $\mathcal{O}$-Mod に対し $\{M\}$ で M の isom. 類を表す.

Def. 5.1

- $F_{proj} := \bigoplus_{M:\text{proj.}} \mathbb{Z}\{M\}$ 全ての proj. $\mathcal{O}$-Mod の isom. 類で生成される自由Abel群
- $F_{coh} := \bigoplus_{M}$ 〃 〃 条件なし = coherent 〃
- $R_{proj} := \left\{ \{M'\} - \{M\} + \{M''\} \;\middle|\; {}^{\exists} 0 \to M' \to M \to M'' \to 0 : \text{ex. in } F_{proj} \right\}$
- $R_{coh} := \left\{ \text{〃} \;\middle|\; \text{〃} \text{ in } F_{coh} \right\}$
- $K_{proj} := F_{proj} / R_{proj}$
- $K_{coh} := F_{coh} / R_{coh}$

：完全 (コンパクト化) Grothendieck 群 (replete / compactified)

M：proj. $\mathcal{O}$-Mod の K_{proj} での剰余類を $[M]$ で表す.
〃 〃 K_{coh} 〃

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$: ex in F_{proj} (F_{coh}) で

$N \in F_{proj}$ なる flat なので

$0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$: ex. in F_{proj} (F_{coh}).

$\Rightarrow$ R_{proj} と R_{coh} は F_{proj} -Mod になり. よって

Prop.

テンソル積により

☆ F_{proj} は可換環, R_{proj} はイデアルで. K_{proj} は可換環

☆ F_{coh} は F_{proj}-Mod, R_{coh} も F_{proj}-Mod で. K_{coh} は K_{proj}-Mod.

F_{proj}-Mod の完全列

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R_{proj} & \hookrightarrow & F_{proj} & \twoheadrightarrow & K_{proj} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & R_{coh} & \hookrightarrow & F_{coh} & \twoheadrightarrow & K_{coh} & \to & 0
\end{array}$$

：Poincaré 準同型

〜やること〜

- K_{coh} は proj. $\mathcal{O}$-Mod たちで生成される (Lem. 5.2)
  - ⟶ 加法的関数は射影 $\mathcal{O}$-Mod での値が分かればよい
- $K_{coh} = K_{proj}$ (Thm. 5.4)
  - ⟶ 上の精密化。coh. 上の加法的関数と proj. 上のそれは全く等価。
- K_{proj} は完全イデアルで生成される (Prop. 5.6)
  - ⟶ 加法的関数は完全イデアルでの値が分かればよい

Lemma. 5.2. met. $\mathcal{O}$-Mod の圏は射影次元 $= 2$ である。

つまり M: 任意の met. $\mathcal{O}$-Mod. に対し

$$0 \to \underset{\text{proj.}}{E} \to \underset{\text{proj.}}{F} \to M \to 0$$

: ex. が存在する。(metrized projective resolution)

prf. ◦ M が n 元生成なら、$F := \mathcal{O}^n \twoheadrightarrow M$ を取り、$E := \mathrm{Ker}(F \twoheadrightarrow M)$ とする。

free より proj.

F: proj. より tor. free.
よって E: tor. free で E: proj.

◦ metric も入る。

□

重要: Lem. 5.2. の意味

☆ 加法的関数の値は、射影的 $\mathcal{O}$-Mod 上でのみ分かればよい。

∵ $\chi(M)$ を計算したければ、

$$0 \to \underset{\text{proj.}}{E} \to \underset{\text{proj.}}{F} \to M \to 0$$

: met. proj. resol. を取れば

$\chi(M) = \chi(F) - \chi(E)$ となるため!

Def.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & : \text{met.proj.resol.} \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 & : \text{met.proj.resol.} \end{tikzcd}$$

が **dominant** ⟺ 縦が adm.epi

(上が下を支配する、という)

Lemma. 5.3.

任意の $0 \to E' \to F' \to M \to 0$, $0 \to E'' \to F'' \to M \to 0$: met.proj.resol. に対し

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F' \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[rru, "\text{直積}"] \arrow[rrd] \arrow[r] & F \arrow[rru] \arrow[rrd] \arrow[rrr, phantom, "\text{pullback}"] & & & & \\ & & 0 \arrow[r] & E'' \arrow[r] & F'' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

とすれば $0 \to E \to F \to M \to 0$ は与えられた2つを支配する met.proj.resol.

確認することリスト

① そもそも $0 \to E \to F \to M \to 0$ が met.proj.resol. になっていること

(1) E, F が proj. であること
(2) 加群の列として完全列であること
(3) $-_{\mathbb{C}}$ を噛ませたとき等長に分裂すること

② 縦の各射が admissible epi. であること

(1) $E \to E', E''$ が adm.epi. であること
(2) $F \to F', F''$ が adm. epi. であること

prf.

① (1) ∘ $F \subseteq F' \oplus F''$ で F', F'' : proj. より F も proj.

∘ $E \subseteq F$ で F : proj. より E も proj.

(2) やるだけ

(3)

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}}' \arrow[r] & F_{\mathbb{C}}' \arrow[r] & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s'"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft \mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}}'' \arrow[r] & F_{\mathbb{C}}'' \arrow[r] & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s''"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft \mathrm{id}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & M_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "s'"] & & F_{\mathbb{C}}' \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} & = \mathrm{id}_{M_{\mathbb{C}}} \\
M_{\mathbb{C}} \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[rr, "\exists ! s"] & & F_{\mathbb{C}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & = \mathrm{id}_{M_{\mathbb{C}}} & \\
 & M_{\mathbb{C}} \arrow[rr, "s''"] & & F_{\mathbb{C}}'' \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} & = \mathrm{id}_{M_{\mathbb{C}}}
\end{tikzcd}
$$

ファイバー積の普遍性より
section が生える

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r] & F_{\mathbb{C}} \arrow[r] & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] \arrow[l, phantom, bend left=20, "\circlearrowleft \mathrm{id}"] & 0
\end{tikzcd}
$$

$$\|$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[r, bend left, "\sim"] \arrow[d, equal] & E_{\mathbb{C}} \oplus sM_{\mathbb{C}} \arrow[r] & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\sim"', "s"] & 0 \\
 & E_{\mathbb{C}}' \times E_{\mathbb{C}}'' & & &
\end{tikzcd}
$$

∵ metric が入っている

∵ 自然に和で metric が入る

誘導される metric が入る.

⇝ ① : $0 \to E \to F \to M \to 0$ は met. proj. resol.

②(1) $E \to E', E''$ は直積からの射影より互いを核にもつ adm.epi.

（つまり $0 \rightleftarrows E' \rightleftarrows E \rightleftarrows E'' \rightleftarrows 0$ で $\longrightarrow$ も $\longleftarrow$ も ex.）

(2)

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 & & \\
 & 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[u, dashed] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[ur] & F \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[dr] & \text{pullback} & & \\
 & 0 \arrow[r] & E'' \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[u, "\exists! i"] \arrow[uur, bend left, "\text{零射}"] & F'' \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[uu, equal] & 0
\end{tikzcd}
$$

WTS: 紫の列は完全列.

- 加群の列としての完全性（明らか）
- $-_{\mathbb{C}}$をしたときに等長に分裂
  - i) i が像への isom.
  - ii) i の直交補 $\xrightarrow{\pi'} F'$ が isom.

i)

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & E'_{\mathbb{C}} \arrow[r] & F'_{\mathbb{C}} \\
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r, "k"] \arrow[ur] \arrow[dr] & F_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[dr] & \\
 & 0 \arrow[r] & E''_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[ul, "j"] \arrow[u, "i"] \arrow[uur, bend left, "\text{零射}"] & F''_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}
$$

- k は像への isom.（完全列の一部だったので）
- j は像への isom.（$E_{\mathbb{C}}$のmetricは$E'_{\mathbb{C}}$と$E''_{\mathbb{C}}$のmetricの和だが、前者0なので）

$\rightsquigarrow$ $i = k \circ j$ は像への isom.

ii) claim. $iE_{\mathbb{C}}$の直交補は $F'_{\mathbb{C}} \times_{M_{\mathbb{C}}} s' M_{\mathbb{C}}$ である.（容易）

すると

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & E'_{\mathbb{C}} \arrow[r] & F'_{\mathbb{C}} \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r] & iE''_{\mathbb{C}} \oplus (F'_{\mathbb{C}} \times_{M_{\mathbb{C}}} s' M_{\mathbb{C}}) \arrow[u, "\pi' = pr_1"] \arrow[dr, "pr_2"] & & & & \\
 & & & s'' M_{\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow] & & & \\
 & 0 \arrow[r] & E''_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[uu, "i"] & E''_{\mathbb{C}} \oplus s'' M_{\mathbb{C}} \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[uuu, equal] \arrow[ull, "s''", "\sim"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

この射影 $\pi' = pr_1$ は isom. である.（加群としてのisoは明らか）

（構成に従って計算するだけなので略）

Thm.5.3

□

Thm. 5.4. Poincaré 準同型 $K_{proj} \to K_{coh}$ は同型.

方針：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{proj} \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_{proj} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & K_{proj} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{coh} \arrow[r, hook] & F_{coh} \arrow[r, two heads] \arrow[ur, "①\ \pi"] & K_{coh} \arrow[r] \arrow[u, bend right, "②"'] & 0
\end{tikzcd}$$

①を生やし、②のように K_{coh} を経由させることで逆射を構成する.

①：$M \in F_{coh}$ つまり任意の met. $\mathcal{O}$-Mod. に対し

$0 \to E \to F \to M \to 0$: met. proj. resol. を取り

$\{M\} \overset{\pi}{\mapsto} [F]-[E]$ に送る.

確認すること；

- この対応の well-defined 性

  つまり、2つの met. proj. resol. $\begin{matrix} 0 \to E' \to F' \to M \to 0 \\ 0 \to E'' \to F'' \to M \to 0 \end{matrix}$ を取るとき、

  $[F']-[E'] = [F'']-[E'']$ となることを示す.

  ⇝ さっきの Lemma. 5.3 により 2つの met. proj. resol を支配する新しい met. proj. resol. を取って議論する.

②：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R_{proj} \arrow[r, hook] \arrow[d] & F_{proj} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & K_{proj} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_{coh} \arrow[r, hook] & F_{coh} \arrow[r, two heads] \arrow[ur, "\pi"] & K_{coh} \arrow[r] \arrow[u, shift left] & 0
\end{tikzcd}$$

K_{coh} の Coker の普遍性で ↑ を生やしたいので、

確認すること；

- $$\begin{tikzcd}
  & & K_{proj} \\
  R_{coh} \arrow[r, hook] & F_{coh} \arrow[ur, "\pi"] &
  \end{tikzcd}$$
  の合成が 0 であること.

さらに R_{coh} は $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$: ex. による

$\{M'\} - \{M\} + \{M''\}$ で生成されるから、この形の元についてのみ示せばよい.

prf.

① 2つの met.proj.resol.
$$0 \to E' \to F' \to M \to 0$$
$$0 \to E'' \to F'' \to M \to 0$$
を取る。Lemma.より

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[u, "\alpha'"] \arrow[d, "\alpha''"'] & F \arrow[r] \arrow[u, "\beta'"] \arrow[d, "\beta''"'] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E'' \arrow[r] & F'' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

: 2つを支配する met.proj.resol. がある。
(つまり α', β' / α'', β'' は adm.epi.) 上2段に注目する。

adm.epi. より $\operatorname{Ker}\alpha'$, $\operatorname{Ker}\beta'$ があるので
左のように広げられる。

$$\begin{tikzcd}
& 0 : ex & 0 : ex & & \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[u] & F' \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[u, "\alpha'"] & F \arrow[r] \arrow[u, "\beta'"] & M \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\alpha' \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u] & \operatorname{Ker}\beta' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

よって
$$\begin{aligned}
&[F]-[E] \\
&= ([F']+[\operatorname{Ker}\alpha']) - ([E']+[\operatorname{Ker}\beta']) \\
&= [F']-[E'].
\end{aligned}$$
同様に下2段に注目すれば
$$= [F'']-[E'']$$
なので $\{M\} \mapsto [F]-[E]$ は well-def.

$$\begin{tikzcd}
& M' \arrow[r, ": ex"] & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[u, two heads, "④"] & M \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[u] & M'' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
& 0 \arrow[r] \arrow[u] & F \arrow[r, equal] \arrow[u, two heads] & F \arrow[r] \arrow[u, two heads] & 0 \\
& 0 \arrow[r] \arrow[u] & E \arrow[r, "③", "\text{inj}"'] \arrow[u, hook] & E'' \arrow[u, hook] \arrow[uuull, bend right, "\delta"'] & \\
& & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

② $0 \to M' \to M \xrightarrow{\alpha} M'' \to 0$: ex. を取る。

met.proj.resol. met.proj.resol.
① ⇒ ②

①: M の met.proj.resol. を何でもよいので取る。
②: F を再利用して M'' の met.proj.resol. を取る。
③ $F \to F$: inj. より $E \to E''$ も inj.
$\quad E \hookrightarrow F$
④ 図を拡張して
⑤ 蛇で δ という短完全列が取れる。
加群の

$$\begin{tikzcd}
0 & & & & \\
M'_{\mathbb{C}} \arrow[u] \arrow[rr] & & M_{\mathbb{C}} \arrow[rr, two heads] & & M''_{\mathbb{C}} \\
& & E^{\perp}_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\wr"] \arrow[rr, two heads] \arrow[ddr] & & E''^{\perp}_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\wr"'] \\
& & \oplus & & \oplus \\
& E_{\mathbb{C}} \arrow[rr, hook] & & E''_{\mathbb{C}} & \\
& E_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\wr"] \arrow[rr] & & E''_{\mathbb{C}} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[uuuulll, bend left, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

: section.

$\square = F''$

よって
$$\begin{aligned}
&\pi(\{M'\} - \{M\} + \{M''\}) \\
&= [E'']-[E] \\
&\qquad -([F]+[E]) \\
&\qquad\qquad +([F]-[E'']) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Prop. 5.5.

$L : \mathrm{Pic}(\overline{O}) \longrightarrow K_{coh}^*$; $[\mathfrak{a}] \mapsto [L(\mathfrak{a})]$ は単射群準同型.

prf.

Prop.4.5 (i) 「$L(\mathfrak{a}) \cong L(\mathfrak{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ は単項完全イデアルだけ異なる」より well-def で inj.

$[L(\mathfrak{a}\mathfrak{b})] \overset{(iii)}{=} [L(\mathfrak{a}) \otimes L(\mathfrak{b})] = [L(\mathfrak{a})][L(\mathfrak{b})]$. □.

これ以降 $\mathrm{Pic}(\overline{O}) \subseteq K_{coh}$ とみなし. $[L(\mathfrak{a})]$ を $[\mathfrak{a}]$ と同一視しそう書く.

Prop. 5.6.

K_{coh} は加法群として $[\mathfrak{a}]$ ($\mathfrak{a}$ は完全イデアル) で生成される

prf.

Prop.4.3 より M: proj. は $\mathcal{O}^n \oplus \mathfrak{a}_f$ ($\mathfrak{a}_f$ はイデアル) の形でかけるので

$0 \to N \to M \to \mathfrak{a}_f \to 0$; 加群の ex. がある.

metric は M から両側に誘導できて met. $\mathcal{O}$-Mod の ex. になる.

$\mathfrak{a}_f \cong L(\mathfrak{a})$ なる $\mathfrak{a}$ がある (L の構成と Prop.4.5(ii)).

$\rightsquigarrow [M] = [\mathfrak{a}] + \underbrace{[N]}_{\text{ランクが下がっている.}}$ $\rightsquigarrow [M] = \sum [\mathfrak{a}_i]$ とかける.

□

重要: Prop.5.6. の意味

☆加法的関数の値は、完全イデアル上でのみ分かればよい.

$\because$ $[M] = \sum [\mathfrak{a}_i]$ なら

$\chi(M) = \sum \chi(\mathfrak{a}_i)$ なので.

Prop. 5.7.

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$：完全イデアルに対し、$K_{coh}$ で $([\mathfrak{a}]-1)([\mathfrak{b}]-1)=0$

スローガン：metrized $\mathcal{O}$-Mod $(M, \langle\ \rangle)$ は

$$\underset{\text{有限部分}}{M},\ \underset{\text{無限部分の情報}}{\langle\ \rangle}$$

の組である。

recall $\mathfrak{a} = \underbrace{\mathfrak{a}_f}_{\text{有限}} \prod_{\underbrace{\sigma\in X(\mathbb{C})=\mathrm{Hom}(K,\mathbb{C})}_{\text{無限}}} \mathfrak{p}_\sigma^{\nu_{\mathfrak{p}_\sigma}}$ ：完全イデアル

$$\downarrow$$

$L(\mathfrak{a}) = (\underbrace{\mathfrak{a}_f}_{\text{有限部分}}, \langle\ \rangle_\mathfrak{a})$ ：invertible met. $\mathcal{O}$-Mod

$\langle x, y\rangle_\mathfrak{a} = \underbrace{\bigoplus_{\sigma\in X(\mathbb{C})} e^{2\nu_{\mathfrak{p}_\sigma}} x_\sigma \overline{y_\sigma}}_{\text{無限部分}}$ $\quad (x, y \in (\mathfrak{a}_f)_\mathbb{C})$

方針：

⓪ $\mathfrak{a}_f, \mathfrak{b}_f \subseteq \mathcal{O}$ かつ 互いに素に帰着。

① $[\mathfrak{a}]+[\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty]+[\mathfrak{b}_f]$ を示す。

… $\mathfrak{a}_\infty, \mathfrak{b}_\infty$ に対応する metric を α, β とすると、スローガンによれば

$[\mathfrak{a}_f, \alpha]+[\mathfrak{b}_f, \beta] = [\mathfrak{a}_f, \alpha\beta]+[\mathfrak{b}_f, 1]$ を示せばよい。

… $0 \to (\mathfrak{a}_f, \alpha) \to (\mathfrak{a}_f\oplus\mathfrak{b}_f, A) \to (\mathfrak{b}_f, \beta) \to 0$:ex

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$0 \to (\mathfrak{b}_f, 1) \to (\mathfrak{a}_f\oplus\mathfrak{b}_f, A) \to (\mathfrak{a}_f, \alpha\beta) \to 0$:ex

みたいな A が見つかればよい。

② $[\mathfrak{a}]+[\mathfrak{b}_f] = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_f]+1$ を示す。

… $0 \to (\mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f, 1) \to (\mathfrak{a}_f, \alpha) \to \mathfrak{a}_f/\mathfrak{a}_f\mathfrak{b}_f \to 0$:ex

$\cong$ ∵ $\mathfrak{a}_f \perp \mathfrak{b}_f$ であればよい。

$0 \to (\mathfrak{b}_f, 1) \to (\mathcal{O}, 1) \to \mathcal{O}/\mathfrak{b}_f \to 0$:ex

③ 組み合わせると $[\mathfrak{a}]+[\mathfrak{b}] \underset{①}{=} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty]+[\mathfrak{b}_f] \underset{②}{=} [\mathfrak{a}\mathfrak{b}_\infty\mathfrak{b}_f]+1 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]+1$